

V.2. Теорема Куна - Таккера

Как и раньше, будем $\times$ зад $Y(u) \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in U \subseteq E^n: g_i(u) \leq 0, i = \overline{1, m}, g_i(u) = 0, i = \overline{m+1, s}\}$ (1) $\|L(u, \lambda) = Y_0(u) + \sum_{i=1}^s \lambda_i g_i(u); \text{ ПМЛ} \Rightarrow (u^*, \lambda^*)$

Приведем усл-я, когда в пр-ле множит-и Лагранжа можно (будет) считать, что $\lambda_0 > 0$, т.е. в силу нормиров-ки $\lambda_0 = 1$. такие зад. наз-ся регулярными // Усл-я регулярности много //

Введем ф-цию Лаг. зад. (1) в норм. форме:

Задача $Y(u) = x^2 + xy + y^2 \rightarrow \inf, u = u(x, y) \in U = \{u \in E^2: x+y-2=0\}^{g(u)=0}$

$u_* = (1, 1)$, $J_* = 3$ — ищется ли ответ

ПМЛ: $L(u, \lambda) = \lambda_0(x^2 + xy + y^2) + \lambda_1(x + y - 2)$ — ф-ция Лагранжа
 $u \in E^2$, $\lambda_0 > 0$ (т.к. зад. мин)

1) $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \neq 0$, $\lambda_0 > 0$

2) (ВН) $L'_u(u, \lambda) = \begin{pmatrix} (2x+y)\lambda_0 + \lambda_1 \\ 2\lambda_0 y + \lambda_0 x + \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) (Усл. доп. не жестк-ти) Истекает вопрос

$\lambda_0, \lambda_1, x, y = ?$ (неизв.)

$x + y = 2$ (уже 3 ур-а, и неизв.)

$\|\lambda\| = 1$ — неудобно;

I. $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$

II. $\lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 \neq 0 \end{cases}$ $\swarrow \nwarrow$ // 4-е ур-ние

I. $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 \neq 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$

II. $\lambda_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + \lambda_1 = 0 \\ 2y + x + \lambda_1 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

$\lambda_1 = -3$ — т.е. подозрительная на оптим-ть

Вып-ся ли крит. опт-ти? $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0, \forall u \in U(*)$

$U(u)$ — вып.? $\langle J''(u)\varepsilon, \varepsilon \rangle \geq 0 \Leftrightarrow J''(u) \geq 0$

$J'(u) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$, $J''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow J(u)$ сип. вып. $\Rightarrow$ ответ

Д/з: If сомневаемся, то проверить (*)

по J'
 Вспомогат. с
 миним-ти

Мы решили зад, но в чем проблема? Из-за λ_0 зад. надо решать несколько раз. Можно ли по виду зад. узнать какой в ней λ_0 ? Вторая проблема: ПМЛ дает

менее. Подождем. т. на оптим-ть (хотелось и иметь не только
необх., но и дост. усл.)

$$L(u, \vartheta) = J(u) + \sum_{i=1}^s \vartheta_i g_i(u), u \in U_0, \vartheta \in \Lambda_0, \Lambda_0 = \{ \vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_s):$$

$\vartheta_1 \geq 0, \dots, \vartheta_m \geq 0 \}$ (2) // ф-ция Лаг. в норм. форме

Опр Точку $(u_*, \vartheta_*) \in U_0 \times \Lambda_0$ наз. седловой т. ф-ции (2), if
 $L(u_*, \vartheta) \leq L(u_*, \vartheta_*) \leq L(u, \vartheta_*)$, $\forall u \in U_0, \forall \vartheta \in \Lambda_0$ (3)

$\nabla \nabla$ 2.1. (дост. усл-е оптим-ти) J ф-ция $J(u), g_i(u), i = \overline{1, s}$
определены и конечны на U_0 , (u_*, ϑ_*) - седлов. т. ф-ции

(2) Тогда $u_* \in U_*$, $J(u_*) = J_* = L(u_*, \vartheta_*)$ (4)

▲ ① (u_*, ϑ_*) - седло. Проанализируем лев. член (3):

$$J(u_*) + \sum_{i=1}^s \vartheta_i g_i(u_*) \stackrel{u \in U_0}{\leq} J(u_*) + \sum_{i=1}^s \vartheta_i^* g_i(u_*) \Rightarrow \sum_{i=1}^s (\vartheta_i - \vartheta_i^*) g_i(u_*) \leq 0, \forall \vartheta \in \Lambda_0 \quad (5)$$

// Цель: $g_i(u_*) \leq 0, i = \overline{1, m}; g_i(u_*) = 0, i = \overline{m+1, s}$

а) Возьмем в (5) $\vartheta = (\vartheta_1^*, \dots, \vartheta_{j-1}^*, \vartheta_j, \vartheta_{j+1}^*, \dots, \vartheta_s^*), \underline{1 \leq j \leq m}, u$

$\forall \vartheta_j \geq 0 \Rightarrow \vartheta \in \Lambda_0$. Получим $(\vartheta_j - \vartheta_j^*) g_j(u_*) \leq 0, \forall \vartheta_j \geq 0$ (6)

Из (6) при $\vartheta_j \rightarrow +\infty \Rightarrow (1 - \frac{\vartheta_j^*}{\vartheta_j}) g_j(u_*) \leq 0 \Rightarrow g_j(u_*) \leq 0$,
 $j = \overline{1, m}$, т.е. $\vartheta_j^* g_j(u_*) \leq 0$ (доп. типа нер-в)

Из (6) при $\vartheta_j \rightarrow 0 \Rightarrow \vartheta_j^* g_j(u_*) \geq 0$

Отсюда делаем вывод, что $\vartheta_j^* g_j(u_*) = 0$ // усл. дополнения

неизвестно //

б) теперь $m+1 \leq j \leq s$

Тогда в (5) возьмем $\vartheta = (\vartheta_1^*, \dots, \vartheta_{j-1}^*, \vartheta_j, \vartheta_{j+1}^*, \dots, \vartheta_s^*) \in \Lambda_0$,

$\forall \vartheta_j \in \mathbb{R}$. Получим $(\vartheta_j - \vartheta_j^*) g_j(u_*) \leq 0, \forall \vartheta_j \in \mathbb{R}^1$

При $\vartheta_j \rightarrow +\infty \Rightarrow (1 - \frac{\vartheta_j^*}{\vartheta_j}) g_j(u_*) \leq 0 \Rightarrow g_j(u_*) \leq 0, j = \overline{m+1, s}$

При $\vartheta_j \rightarrow -\infty \Rightarrow (1 - \frac{\vartheta_j^*}{\vartheta_j}) g_j(u_*) \geq 0 \Rightarrow g_j(u_*) \geq 0, j = \overline{m+1, s}$

Отсюда $\Rightarrow$, что $g_j(u_*) = 0, j = \overline{m+1, s}$. Кроме того, $u_* \in U_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_* \in U + \text{усл. доп. неистинности}$ // Наша цель: $u_* \in U_*$

II Проанализируем прав. часть (3)

$$L(u_*, \vartheta^*) = J(u_*) + \sum_{i=1}^s \vartheta_i^* g_i(u_*) \stackrel{=0}{\leq} L(u, \vartheta^*) = J(u) + \sum_{i=1}^s \vartheta_i^* g_i(u) = J(u) + \sum_{i=1}^m \underbrace{\vartheta_i^*}_{\geq 0} \underbrace{g_i(u)}_{\leq 0, \forall u \in U} + \sum_{i=m+1}^s \underbrace{\vartheta_i^* g_i(u)}_{=0, \forall u \in U} \leq J(u) =$$

$$\Rightarrow J(u_*) \leq J(u), \forall u \in U \Rightarrow L(u_*, \vartheta^*) = J_*, u_* \in U_* \blacksquare$$

Пример $J(u) \rightarrow -u \rightarrow \inf, u \in U = \{u \geq 0 : g(u) = u^2 \leq 0\}$
 Найти сеп. т.? $L(u_*, \vartheta) \leq L(u_*, \vartheta^*) \leq L(u, \vartheta^*), \forall u \geq 0, \forall \vartheta \geq 0$

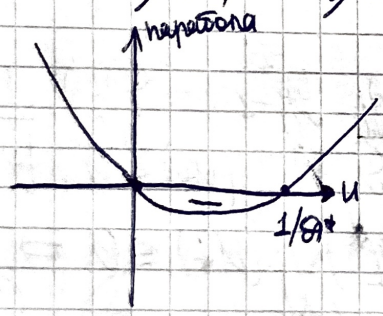
$J_* = 0, u_* = 0$ // Сеп. $(0, \vartheta^*)$

$$L(u, \vartheta) = -u + u^2 \vartheta : L(u_*, \vartheta) = 0 \leq L(u_*, \vartheta^*) = 0 \leq L(u, \vartheta^*) = -u + u^2 \vartheta^*, \forall u \geq 0, \forall \vartheta \geq 0$$

$$\vartheta^* \cdot u^2 - u = u(\vartheta^* u - 1) \geq 0, \forall u \geq 0$$

$$1) \vartheta^* = 0 \Rightarrow -u \geq 0, \forall u \geq 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$2) \vartheta^* > 0 \Rightarrow \emptyset, \forall u \geq 0$$



Значит сеп. нет

$g / \text{задан } J(u) \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in U_0 : g_1(u) \leq 0, \dots, g_m(u) \leq 0\}$

IV.2.2. (Куна-Таккера) U_0 - вып., замкн. мн-во из E^n ; J в зад. (1) $U = \{u \in U_0 : g_1(u) \leq 0, \dots, g_m(u) \leq 0\}$ (7) Ф-ции $J(u), g_i(u), i=1, m$, - вып. на $U_0, J_* > -\infty, U_* \neq \emptyset$. J , кроме того, $\exists \bar{u} \in U : g_1(\bar{u}) < 0, \dots, g_m(\bar{u}) < 0$ (8) // Усл-е Слейтера // Тогда $\forall u_* \in U_* \exists \vartheta^* \in \Delta_0 = \{\vartheta \in E^m : \vartheta_1 \geq 0, \dots, \vartheta_m \geq 0\} = E_+^m$, такая, что пара (u_*, ϑ^*) - сеп. т. ф-ции лаг. $L(u, \vartheta)$ (2)

Доп. пред.: $J(u), g_1(u), \dots, g_m(u) \in C^1(U_0)$. Тогда можем воспольз-ся ТММ, согласно к д/у $\forall u_* \in U_* \exists \vartheta^* = (\vartheta_1^*, \dots, \vartheta_m^*)$:

$$\bar{g}_i^* \neq 0, \bar{\theta}_0^* \geq 0, \bar{\theta}_i^* \geq 0, \dots, \bar{\theta}_m^* \geq 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial L(u^*, \bar{\theta}^*)}{\partial u}, u - u^* \geq 0, \quad \forall u \in U_0, \quad (9) \quad \|L'_u = 0\|$$

$$\bar{\theta}_i^* g_i(u^*) = 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (10) \quad \text{// Усл. доп. не жесткости //$$

И. к. $L(u, \bar{\theta}) = \bar{\theta}_0 J(u) + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i g_i(u)$ — вып. на U_0 вып. $\Rightarrow$ в силу крит. оптим-ти из (9) $\Rightarrow L(u^*, \bar{\theta}^*) \leq L(u, \bar{\theta}^*), \forall u \in U_0$, или подробнее: $L(u^*, \bar{\theta}^*) = \bar{\theta}_0^* J(u^*) + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^* g_i(u^*) = \bar{\theta}_0^* J(u^*) \leq L(u, \bar{\theta}^*) = \bar{\theta}_0^* J(u) + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^* g_i(u), \forall u \in U_0 \quad (11)$

$$\Rightarrow \text{Покажем, что } \bar{\theta}_0^* > 0. \text{ От противного:}$$

$\exists \bar{\theta}_0^* = 0 \Rightarrow$ из (11) $\Rightarrow$ (при $u = \bar{u}$)

$$0 \leq \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^* g_i(\bar{u}) \leq 0 \Rightarrow (!?) \quad \text{// } \exists \bar{\theta}_i^* > 0, i = \overline{1, m}$$

$$\bar{\theta}_0^* = 0 \Rightarrow (\bar{\theta}_1^*, \dots, \bar{\theta}_m^*) \neq 0, g_i(\bar{u}) < 0$$

Отсюда $\Rightarrow$, что $\bar{\theta}_0^* \neq 0$ и > 0 . Поэтому в (8)-(10) поделить на $\bar{\theta}_0^*$ и считать далее, что $\bar{\theta}_0^* = 1$. Тогда из (9) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow L(u^*, \bar{\theta}^*) \leq L(u, \bar{\theta}^*), \quad \forall u \in U_0 \text{ — прав. часть след. Далее,}$$

$$\bar{\theta}_i^* g_i(u^*) \leq 0 \stackrel{(10)}{=} \bar{\theta}_i^* g_i(u^*), \quad i = \overline{1, m} \Rightarrow \left\{ \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^* g_i(u^*) = J(u^*) + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^* g_i(u^*) \leq J(u^*) + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^* g_i(u^*) \Rightarrow L(u^*, \bar{\theta}) \leq L(u^*, \bar{\theta}^*), \forall \bar{\theta} \in L_0 \Rightarrow \right.$$

$\Rightarrow$ лев. часть след. (3) ■

Усл-я и исп-ные д/реш-я зад. $\forall K$ -III

1) Вып-ся ли усл-я Слейт.?

2) Вып-ся ли усл-я вып-ти?

$\Rightarrow$ if да, то $\bar{\theta}_0 = 1 \Rightarrow \text{ПМЛ} \Rightarrow (u^*, \bar{\theta}^*)$

— т., подозреет. на оптим-ть $\Rightarrow$ след. т. $\Rightarrow u^*$ — реш-е исход. зад.

Пример $J(u) = u, u \in U = \{u \in E^1: u \geq 0\}; g(u) = u^2 \leq 0$

След. может $\exists$ и без треб. вып-ния усл. Слейтера $(\bar{\theta}_0^*, \bar{\theta}_1^*) = \text{сегл. т.} \geq 0$

V.3. Двойственная задача // играют большую роль //

1. Вернемся к зад. $J(u) \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in U_0: g_i(u) \leq 0, i = \overline{1, m},$

$$g_i(u) = 0, i = m+1, s \} \quad (1)$$

Ранее мы показали (IV.2.1), что if ф-ция Лаг. $L(u, \theta) = J(u) + \sum_{i=1}^s \theta_i g_i(u)$, $u \in U_0$, $\theta \in \Delta_0$ (2) имеет седлов. т. $(u_*, \theta^*) \in U_0 \times \Delta_0$ в смысле нер-в $L(u, \theta) \leq L(u_*, \theta^*) \leq L(u, \theta^*)$, $\forall u \in U_0$, $\forall \theta \in \Delta_0$ (3), то $u_* \in U_*$ - реш-е зад. (1), причем $J_* = L(u_*, \theta^*)$

Введем ф-цию: $\chi(u) = \sup_{\theta \in \Delta_0} L(u, \theta)$, $u \in U_0$, (4) и задачу $\chi(u) \rightarrow \inf, u \in U_0$ (5)

Окаж-ся, зад. (5) $\Leftrightarrow$ зад. (1), т.к. $L(u, \theta) = J(u) + \sum_{i=1}^s \theta_i g_i(u)$
 $\chi(u) = J(u)$, $u \in U$,
 $+\infty$, $u \in U_0 \setminus U$ (6)

Тогда $\chi_* = \inf_{u \in U_0} \chi(u) = \inf_{u \in U} J(u) = J_*$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} = \{u \in U_0 : \chi(u) = \chi_*\} = U_{0*}$

Сконструируем двойственную задачу:

$$\psi(\theta) = \inf_{u \in U_0} L(u, \theta), \theta \in \Delta_0, \quad (8)$$

$$\psi(\theta) \rightarrow \sup, \theta \in \Delta_0 \quad (9)$$

2. Зачем нужна ДЗ?

Обозначим: $\psi^* = \sup_{\theta \in \Delta_0} \psi(\theta)$, $\Delta_* = \{\theta \in \Delta_0 : \psi(\theta) = \psi^*\}$ (10)

$$\text{Всегда верно: } \psi(\theta) \leq \psi^* \leq \chi_* = J_* \leq \chi(u), \forall u \in U_0, \forall \theta \in \Delta_0 \quad (11)$$

Ф-м это. Возьмем $\forall (u, \theta) \in U_0 \times \Delta_0$. Тогда

$$L(u, \theta) \leq \sup_{\gamma \in \Delta_0} L(u, \gamma) = \chi(u), \forall u \in U_0;$$

$$L(u, \theta) \geq \inf_{v \in U_0} L(v, \theta) = \psi(\theta), \forall \theta \in \Delta_0$$

Объединим эти нер-ва: $\forall u \in U_0, \forall \theta \in \Delta_0$

$$\psi(\theta) = \inf_{v \in U_0} L(v, \theta) \leq L(u, \theta) \leq \sup_{\gamma \in \Delta_0} L(u, \gamma) = \chi(u) \quad (12) \Rightarrow \psi(\theta) \leq \chi(u),$$

$$\forall u \in U_0, \forall \theta \in \Delta_0 \Rightarrow \psi^* \leq \chi_* \quad // \psi(\theta) \leq \psi^* \leq \chi_* \leq \chi(u) //$$

А когда $\psi^* = \chi_*$?

IV.3.1. Для того, чтобы $\psi^* = \chi^*$, $U_* \neq \emptyset$, $\Delta^* \neq \emptyset$ (13) $\Leftrightarrow$ ф-ция $L(u, \vartheta)$ (2) имеет седло (3). Мин-во седл. т.

$$\{(u_*, \vartheta^*)\} = U_* \times \Delta^*$$

$\Rightarrow$] г/ (1) (или (5)) и (9) выполнены соотнош-я (13).

Д-м, что тогда $L(u, \vartheta)$ имеет седло. Возьмем в паре (u_*, ϑ^*)

где $u_* \in U_*$, $\vartheta^* \in \Delta^*$. Из (12) при $u = u_*$, $\vartheta = \vartheta^*$ имеем

$$\psi^* = \psi(\vartheta^*) = \inf_{\vartheta \in \Delta_0} L(u_*, \vartheta) \leq L(u_*, \vartheta^*) \leq \sup_{\vartheta \in \Delta_0} L(u_*, \vartheta) = \chi(u_*) = \chi^*$$

$$= \chi^* = \psi^* \Rightarrow$$

$$\chi^* = \chi(u_*) = L(u_*, \vartheta^*) = \inf_{\vartheta \in \Delta_0} L(u_*, \vartheta) \leq L(u_*, \vartheta^*), \quad \forall u \in U_0; \quad \text{н. часть седла}$$

$$\psi^* = \psi(\vartheta^*) = L(u_*, \vartheta^*) = \sup_{\vartheta \in \Delta_0} L(u_*, \vartheta) \geq L(u_*, \vartheta), \quad \forall \vartheta \in \Delta_0; \quad \text{н. часть седла}$$

$\Rightarrow (u_*, \vartheta^*)$ - седло, т.е. $U_* \times \Delta^*$ - мин-во седл. т.

$\Leftarrow$] $(u_*, \vartheta^*) \notin$ произвол. седл. т. $L(u, \vartheta)$ в смысле (3). Д-м

что тогда справедливо (13) и $u_* \in U_*$, $\vartheta^* \in \Delta^*$

Из седл. нер-ва имеем: $\| L(u_*, \vartheta) \leq L(u_*, \vartheta^*) \leq L(u, \vartheta^*) \|$

$$\sup_{\vartheta \in \Delta_0} L(u_*, \vartheta) = L(u_*, \vartheta^*) = \inf_{\substack{u \in U_0 \\ \vartheta \in \Delta_0}} L(u, \vartheta^*)$$

$\Rightarrow$ т.к. $u_* \in U_0$ и $\vartheta^* \in \Delta_0$ имеем:

$$\chi_* \leq \chi(u_*) = L(u_*, \vartheta^*) = \psi(\vartheta^*) \leq \psi^* \stackrel{(11)}{\leq} \chi_* \Rightarrow \chi_* = \psi^*$$

$$\text{и } \chi_* = \chi(u_*) \Rightarrow u_* \in U_* \Rightarrow U_* \neq \emptyset$$

$$\psi^* = \psi(\vartheta^*) \Rightarrow \vartheta^* \in \Delta^* \Rightarrow \Delta^* \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$ мин-во седл. т. $\exists \in U_* \times \Delta^*$ ■

Сложность РЗ в ее составлении